

Ejercicio 1. Probar que el área del trozo de cono $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a\,x = h\sqrt{y^2 + z^2}, 0 \le x \le h, h > 0, a > 0\}$está dada por área(S) $= \pi a\sqrt{a^2 + h^2}$.

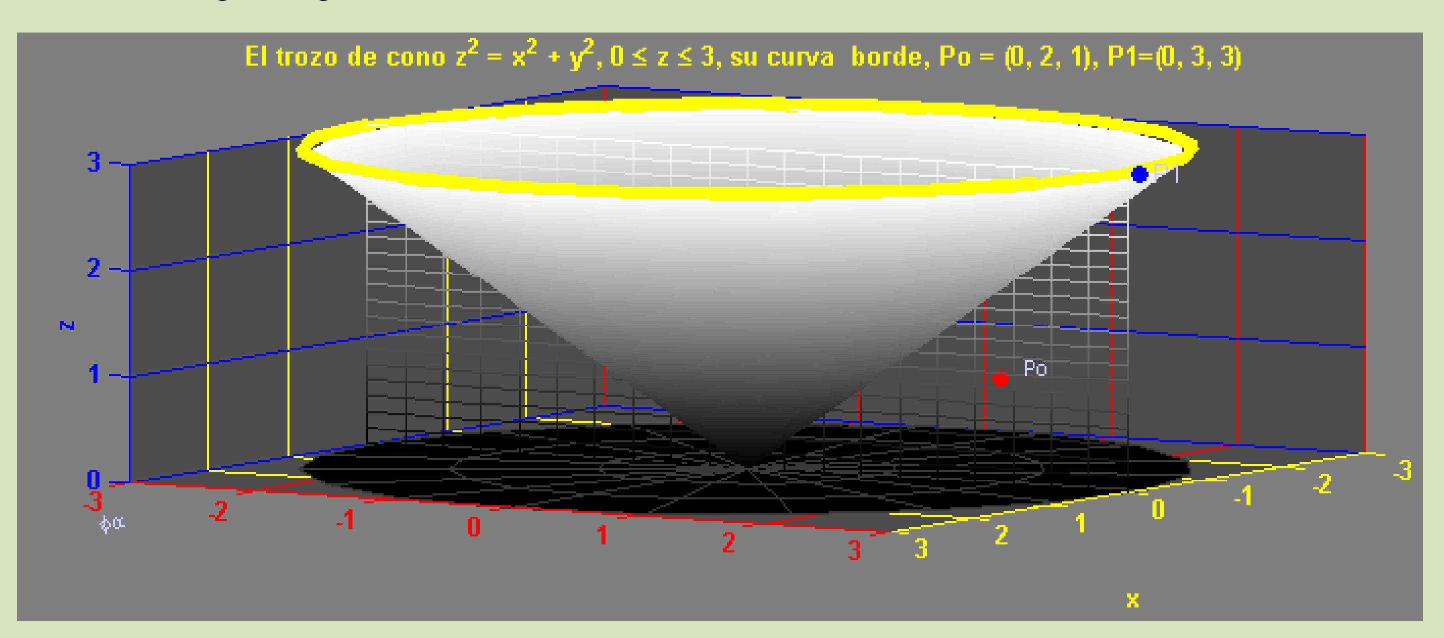
Sabemos que[a] $área(S) = \iint_S dS$, siendo. Luego para el cálculo basta con una parametrización de la superficie S, lo que puede hacerse en $\mathcal{R}_{uv} \stackrel{def}{=} \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le a\}$ siendo $S = \bar{T}(\mathcal{R}_{uv})$, con $\bar{T} : \mathcal{R}_{uv} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{T}(u, v) = (hv/a, v\cos(u), v\,sen(u))$, con campo de normales dado por el producto vectorial $\bar{N}(u, v) = \bar{T}_u(u, v) \times \bar{T}_v(u, v) = (v/a)\,(-a, h\cos(u), h\,sen(u))$[b], vector cuya norma es $\|\bar{N}(u, v)\| = \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + h^2}$. Ahora todo se reduce al cálculo mismo del área, que resulta ser $\pi a\sqrt{a^2 + h^2}$.

$$área(S) = \iint_S dS = \iint_{\mathcal{R}uv} \|\bar{N}(u, v)\| du\,dv = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + h^2}\int_0^{2\pi} du \int_0^a v\,dv = \pi a\sqrt{a^2 + h^2}$$

Observación. La expresión obtenida es la mitad de la longitud del anillo del cono multiplicado por la longitud de la generatriz, lo que no es sino un caso trivial de uno de los extraordinarios teoremas de Pappus[c], ya que πa es la longitud recorrida en su rotación por el punto medio de la generatriz

Ejercicio 2. Hallar la mínima distancia entre el punto $P_0 = (0, 2, 1)$ y la curva C intersección de la superficie parametrizada por $\Phi: D \to \mathbb{R}^3$tal que $\Phi(u, v) = (u\cos(v), u\,sen(v), u), siendo\ D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u, 0 \le v \le 2\pi\}$ con el plano de ecuación dada por z = 3. Graficar los objetos que intervienen en este ejercicio.

Es inmediato que la curva C, intersección entre el cono y el plano es la circunferencia parametrizada por la función vectorial $\bar{\gamma}: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\gamma}(t) = (3\cos(t), 3\sin(t), 3)$, de modo que el cuadrado de la distancia entre P_0 y un punto de C está dado por la función escalar $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\ tal\ que\ f(t) = \|\bar{\gamma}(t) - P_0\|^2 = 17 - 12\,sen(t)$, función que es inmediato ver que alcanza un mínimo sii $t = \frac{\pi}{2}$, de modo que la mínima distancia es d (C, P_0) = $\sqrt{5}$, y se produce entre el punto P_0 y el punto $P_1 = (0, 3, 3)$. El ejercicio puede resolverse de modo inmediato, también, observando con atención la disposición relativa de los objetos que intervienen en la siguiente figura: la solución debiera entonces resultar evidente.



Observar, en la figura, que P_0 (punto rojo) y P_1 (punto azul) se hallan contenidos en el plano de ecuación x = 0, que se representa como una malla cuadriculada.

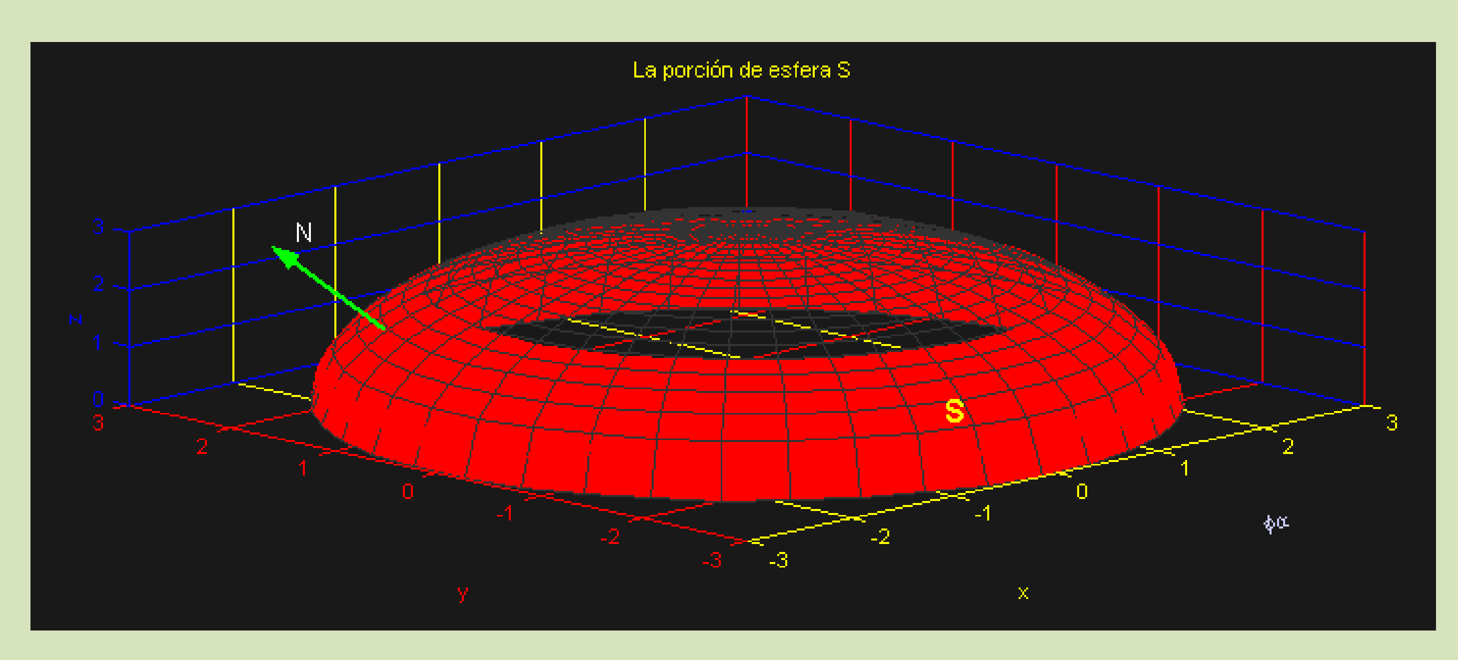
[a] El problema de hallar el área de una lámina es una de las aplicaciones más sencillas de las integrales de superficie de campos escalares, y pertenece a la misma familia del cálculo de masas, baricentros, momentos estáticos, momentos de inercia, momentos centrífugos, todos inscriptos en el campo de la ingeniería civil. Ver, por ejemplo, (Apostol 1980, §12.7ejemplo 2, 525-526).

[b] Es inmediato que esta parametrización es $C^\infty(\mathcal{R})$, y que la normal es sólo nula en el vértice del cono, de modo que se trata de una parametrización regular en casi todas partes de $\mathcal{R}$ (ya que deja de serlo sólo en un segmento de $\mathcal{R}$: contestar en cuál). Por otra parte, la parametrización es inyectiva en casi todas partes de $\mathcal{R}$ (creo un ejercicio muy instructivo la prueba de esta afirmación, siempre que lo haga uno mismo).

[c] Pappus (Latinizado nombre de Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεύς), matemático de la escuela alejandrina, lo expone en el libro VII de su *Synagoge* hacia el 340 dc. También se le llama a veces teorema de Guldin, por el jesuita matemático Paul Guldin que lo redescubrió en el siglo XVII. Les recomiendo leer acerca de estos extraordinarios resultados y sus pruebas, por ejemplo, en (Lang 1976, 318, Apostol 1980, 459-461). Una breve descripción del papel de estos teoremas en la historia de la matemática puede verse en (Boyer y Merszbach 1989, 206-213).



Ejercicio 3. Sea $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=\sqrt{9-x^2-y^2}, 0\le z\le 2\}$ y el campo vectorial $\bar{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $C^1(\mathbb{R}^3)$ cuya divergencia es constantemente igual a 3, y del que se sabe además que $\bar{f}(x,y,0)=(3x,0,0), \bar{f}(x,y,2)=(3x+2y^2,2xy^2,-4xy)$. Calcular el flujo a través de S, indicando la orientación asignada.



El cálculo del flujo del campo vectorial a través de S orientada como se indica en la figura anterior, se simplifica formando el macizo $\mathcal{M}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 9, 0\le z\le 2\}$, cuya frontera es $S^* \stackrel{def}{=} S\cup S'\cup S''$, siendo S' el círculo de radio $\sqrt{5}$ dado por $S' \stackrel{def}{=} \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=2, x^2+y^2\le 5\}$, S'' el círculo de radio 3 dado por $S' \stackrel{def}{=} \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0, x^2+y^2\le 9\}$ que actúan como tapas superior e inferior, respectivamente. El campo de normales de S' es claramente constante, y lo orientamos con N'(x, y, 2) = (0, 0, 1), de modo que $\bar{f}(x,y,2)\cdot\check{n} = (3x+2y^2,2xy^2,-4xy)\cdot(0,0,1)=-4xy$ por lo que resulta evidente[d] que $\iint_{S'}\bar{f}\cdot\check{n}\,dS=-4\iint_{S'}xy\,dS=0$. En cuanto al campo de normales de S'' es también claramente constante, y lo orientamos con N'(x, y, 0) = (0, 0, −1), de modo que $\bar{f}(x,y,0)\cdot\check{n} = (3x,0,0y)\cdot(0,0,-1)=0$ por lo que resulta evidente que $\iint_{S''}\bar{f}\cdot\check{n}\,dS=0$. Ahora, por el teorema de Gauss[e] es $\iint_{S^*}\bar{f}\cdot\check{n}\,dS=\iint_S\bar{f}\cdot\check{n}\,dS+\iint_{S'}\bar{f}\cdot\check{n}\,dS+\iint_{S''}\bar{f}\cdot\check{n}\,dS=\iiint_{\mathcal{M}}div(\bar{f})dV$, de donde, por la nulidad del flujo sobre ambas tapas queda $\iint_S\bar{f}\cdot\check{n}\,dS=\iiint_{\mathcal{M}}div(\bar{f})dV$. Pero como la divergencia del campo es constantemente 3, $\iiint_{\mathcal{M}}div(\bar{f})dV=3\iiint_{\mathcal{M}}dV$ puede calcularse con facilidad en coordenadas esféricas, observando que la colatitud φ ∈ [φₒ, π/2], siendo φₒ el ángulo cuyo coseno es 2/3[f], mientras que θ∈[0, 2π) y ρ∈[0, 3]. Entonces, $3\iiint_{\mathcal{M}}dV=3\left[\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\varphi o}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^3\rho^2\sin(\varphi)d\rho+\frac{1}{3}10\pi\right]=2\pi 3^3\cos(\varphi o)+10\pi=46\pi$. De este modo, el flujo pedido es $\iint_S\bar{f}\cdot\check{n}\,dS=46\pi$. Si se prefieren coordenadas cilíndricas, el cálculo es

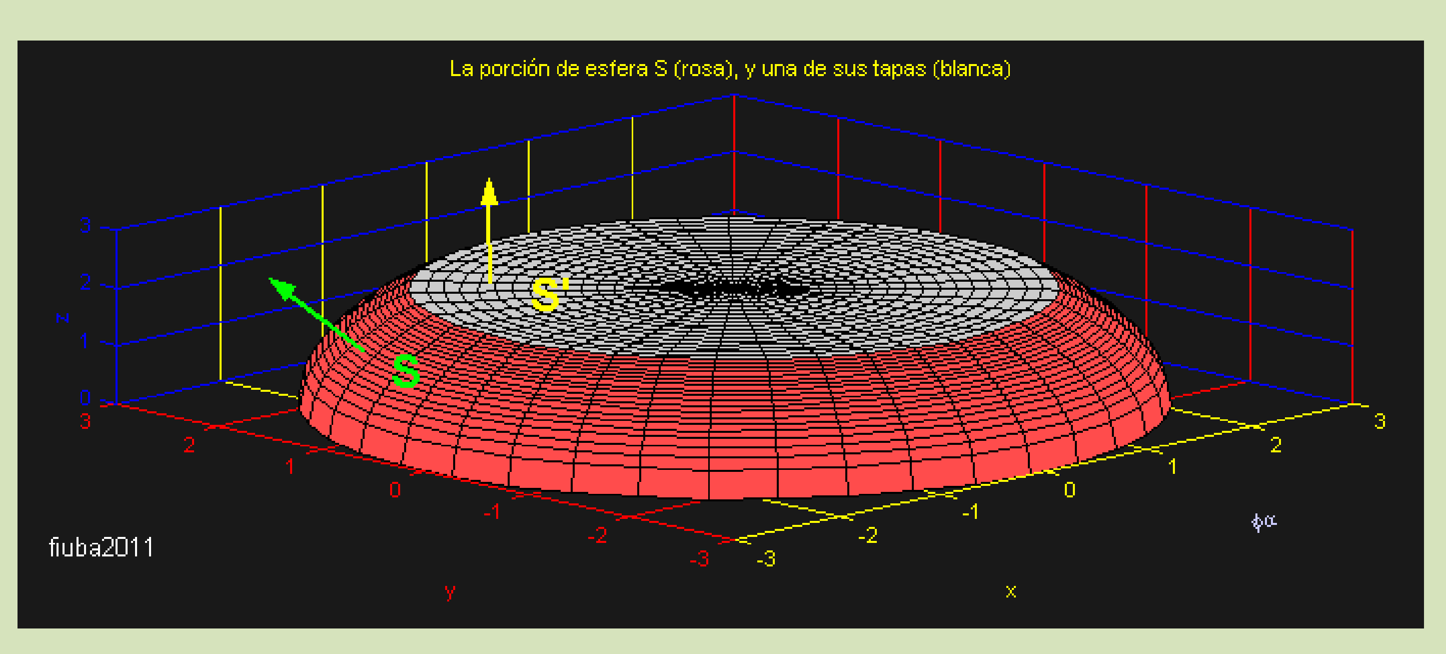
$$3\iiint_{\mathcal{M}}dV=3\left[\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}}\int_0^2 r\,dz\,dr\,d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{5}}^3\int_0^{\sqrt{9-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta\right]=3[10\pi+\frac{16}{3}\pi]=46\pi$$

[d] La nulidad de la integral es el resultado necesario de integrar en un recinto simétrico (como el círculo) un campo escalar antisimétrico respecto a cualquiera de los ejes coordenados. Desde la ingeniería civil, el resultado es también obvio, dado que la integral que se está calculando es el momento centrífugo del círculo respecto a sus ejes coordenados. De cualquier manera, es recomendable practicar el cálculo para alcanzar el resultado $\iint_{S'}xy\,dS=0$. Para ver el significado del momento centrífugo puede verse un texto clásico de mecánica (Hertig 1978, 287 ss) o de Física elemental (Halliday, Resnick y Walker 1993, 295 ss).

[e] Dejamos aquí al lector el trabajo específico de justificar por qué el teorema es aplicable en este caso (esto significa, dar cuenta que los objetos S*, el campo vectorial y el macizo $\mathcal{M}$ cumplen efectivamente las hipótesis que aseguran su validez. Se admite conocido teorema: para un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, de clase C^1 en un abierto simplemente conexo que contiene a una superficie cerrada S* regular por partes, simple y orientada con normal saliente, el flujo del campo a través de S* coincide con la integral triple de su divergencia en la región M de la que S* es frontera. Las hipótesis pueden debilitarse, y la dimensión del espacio ampliarse, resultando teoremas más generales; puede verse una presentación introductoria en Lang, S. (1990). pp. 442-458. El teorema de Gauss (también suele llamársele 'teorema de la divergencia') se encuentra presentado de modo simple en (Santaló 1993, §21,156-166). En (Kurtis 1979, §10.6, 465-472) el tratamiento es sencillo y de fácil lectura, como también en (Marsden y Tromba 1991, §8.4, 528-541, Apostol 1980, §12.19, 557-567). En (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1968, §92,516-526) se tiene una presentación algebraica completa con abundantes comentarios y ejercicios, además de algunas aplicaciones físicas (en §93). En la física, la ley de Gauss se deriva de modo casi inmediato del teorema, y toma diversas formas según la naturaleza del campo vectorial; por ejemplo, para el caso en que el campo es un campo eléctrico electrostático, el flujo a través de una superficie cerrada resulta igual a la carga eléctrica neta encerrada dividida por $\in_0$ (en el sistema mks). Ver, por ejemplo, (Cheng 1998, 87, Halliday, Resnick y Walker 1993, 680-681, 683-685, Reitz, Milford y Christy 1986, 36-41, 89-91, 366).

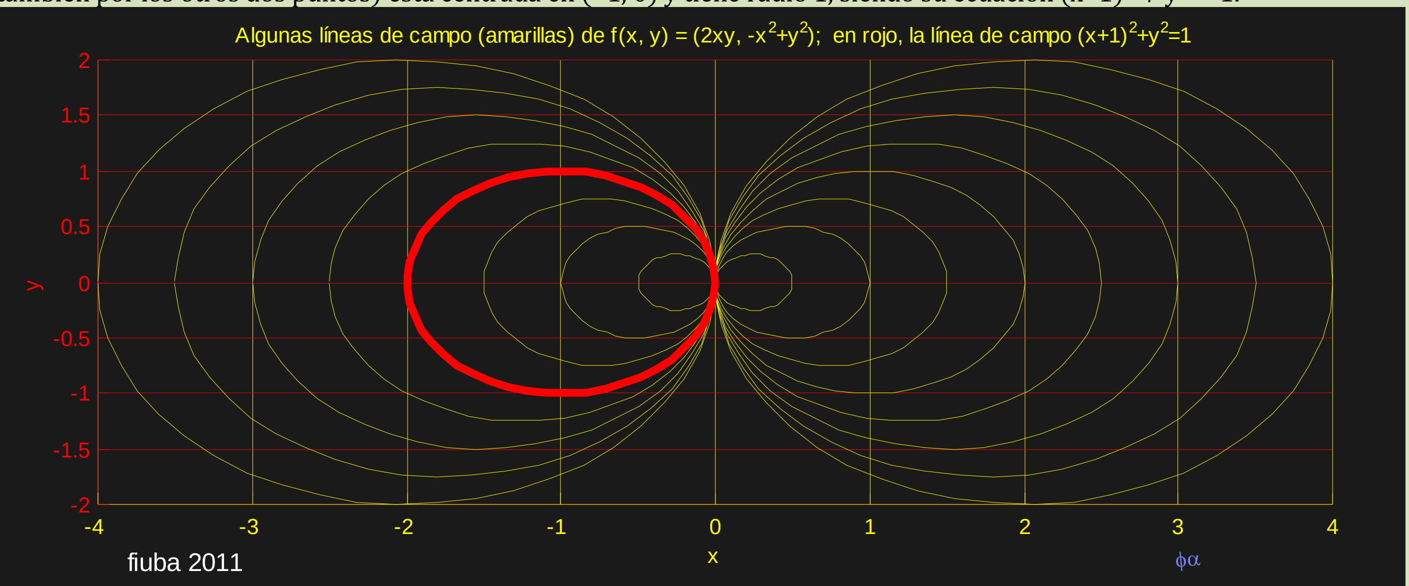
[f] Recomendamos aquí asegurarse de esto: la boca de la superficie S está a la cota $z_0 = 2$, y el radio es 3, de modo que para todos los puntos de la boca, la coordenada φ se mantiene constante.





Ejercicio 4. Definir línea de campo del campo vectorial C² en su dominio, $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Si $\bar{f}(x, y) = (2xy, -x^2 + y^2)$, graficar los vectores tangentes a las líneas de campo de $\bar{f}$ en los puntos $P_0 = (-1, 1)$, $P_1 = (-2, 0)$ y $P_3 = (-1, -1)$. Hallar la ecuación cartesiana de la línea de campo que pasa por P_0 y graficar.

Dada la definición[g] de líneas de campo, los tres vectores tangentes pedidos se obtienen de hacer directamente $v_1 = \bar{f}(P_1) = (-2, 0)$, $v_2 = \bar{f}(P_2) = (0, -4)$, $v_3 = \bar{f}(P_3) = (2, 0)$. Para hallar la ecuación cartesiana, basta con resolver la ecuación diferencial dada por $(x^2 - y^2)\,dx + (2xy)\,dy = 0$, que es reducible a exacta[h] (factor integrante $\mu(x) = x^{-2}$), y cuya solución general es la familia de circunferencias centradas en el eje x que pasan por el origen, de ecuación $(x-k)^2 + y^2 = k^2$, con k cualquier constante real no nula. En particular, como es evidente, la circunferencia que pasa por P_0 (y que, de hecho pasa también por los otros dos puntos) está centrada en $(-1, 0)$ y tiene radio 1, siendo su ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$.



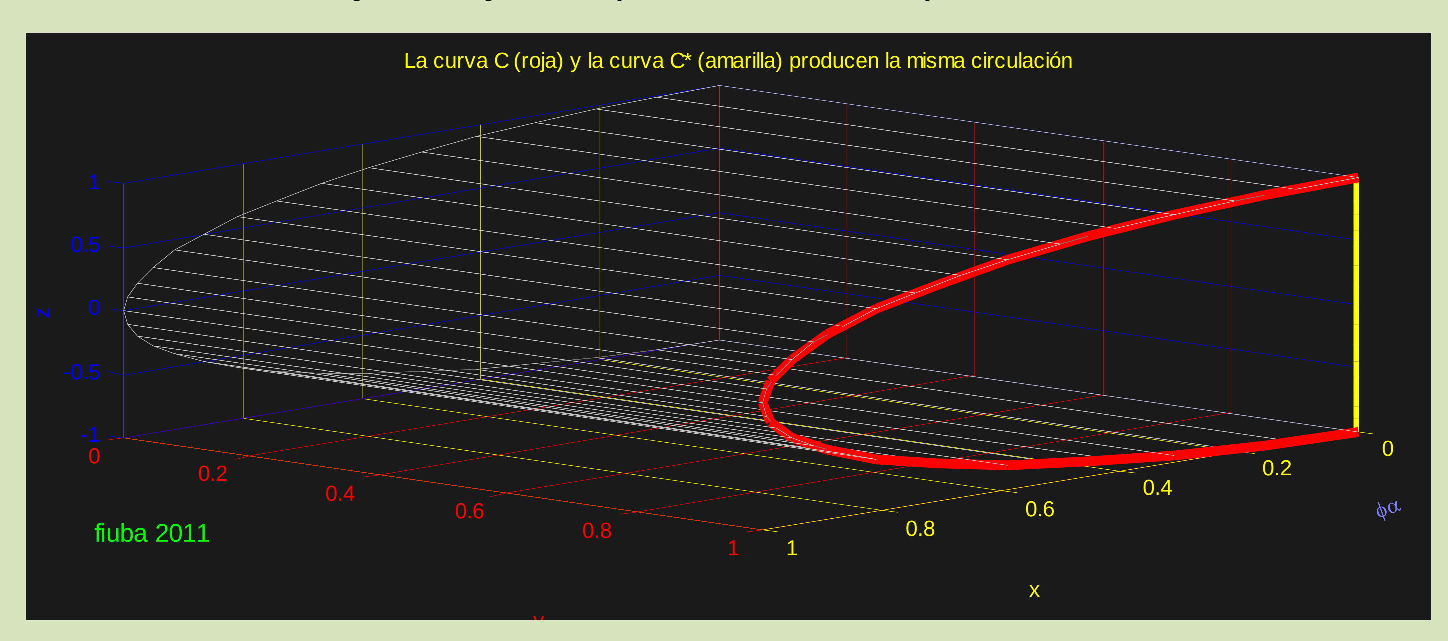
[g] Se acepta conocida la definición de que la imagen de $\bar{\gamma}(t)$ es una línea de campo del campo vectorial $\bar{f}$ en el punto P = $\bar{\gamma}(t)$ sii $\bar{f}(\bar{\gamma}(t)) = \bar{\gamma}'(t)$, que puede verse en, por ejemplo, Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (1991). *Cálculo*, Capítulo 3, Funciones con valores vectoriales, §3.3, Campos vectoriales, p.216, definición. Una definición menos formal y más sugerente en (Santaló 1993, §14, 96-98), con la distinción entre líneas de campo y de corriente, en este ejercicio coincidentes al tratarse de un campo estacionario. Michael Faraday introdujo (siglo XIX) el concepto que llamó *líneas de fuerza* de un modo que podría expresarse como *una línea imaginaria dibujada de tal manera que su dirección en cualquier punto es la del campo en ese punto*. James Clerk Mawell las adopté y dotó de rigor matemático de un modo que sorprendió al mismo Faraday, que le pregunta a Maxwell si no será demasiada ferretería matemática: *¿no puede expresarlas en el lenguaje común tan clara y completamente como por medio de expresiones matemáticas?* Ver *Faraday a Maxwell, 13 nov de 1857* en *The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell* dirigida por P. Harman, Cambridge, 1990, p. 548. El alumno puede ver en este ejercicio que, si basta la noción coloquial de Faraday para responder la primera parte de la pregunta, es absolutamente imposible obtener alguna respuesta a la segunda parte (la ecuación cartesiana). Ver una discusión epistemológica e histórica del significado de la pregunta de Faraday en (Gingras 2006, 109-112). Para algunos de los significados clásicos de las líneas de campo en Física elemental, puede verse (Reitz, Milford y Christy 1986, 31, 220).

[h] Entre los muchos textos de ecuaciones diferenciales, el punto específico de las diferenciales exactas o reducibles a ellas puede verse en (Braun 1990, 57-64, Zill 2007, 50-58, Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1965, 161-163, Birkhoff y Rota 1989, 15-16, Roxin y Spinadel 1976, 13-14).



Ejercicio 5. Sea $\bar{f}: D \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial irrotacional C²(D), siendo D la bola centrada en el origen de coordenadas de radio 3, mientras que $\bar{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), 2)$. Calcular la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la curva C parametrizada por $\bar{\gamma}: [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{\gamma}(t) = (\sin(t), 1, \cos(t))$.

La irrotacionalidad del campo en D (bola que es un abierto simplemente conexo), la regularidad e inyectividad de la curva C (observar que su parametrización es una función vectorial de clase $C^\infty(0, \pi)$, con derivada nunca nula, ya que su norma es siempre 1), la inclusión de C en D (pues C es la semicircunferencia de radio 1 centrada en (0, 1, 0) contenida en el plano de ecuación y = 1, y por lo tanto cualquiera de sus puntos se halla a una distancia del origen de coordenadas menor que 3[i]), son suficientes[j] para afirmar que la circulación pedida es la misma para cualquier curva regular inyectiva que una los mismos puntos que C, esto es $P_0 = \bar{\gamma}(0) = (0, 1, 1)$ con $P_1 = \bar{\gamma}(\pi) = (0, 1, -1)$. Una tal curva podría ser C*, parametrizada por $\overline{\gamma *}: [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\overline{\gamma *}(t) = (0, 0, 1 - t)$, para la cual es $\overline{\gamma *}'(t) = (0, 0, -1)$, de modo que puede escribirse entonces que la circulación pedida es $\int_C \bar{f} \cdot \overline{dl} = \int_{C*} \bar{f} \cdot \overline{dl} = \int_0^2 \bar{f}(\overline{\gamma *}(t)) \cdot \overline{\gamma *}'(t)\, dt = \int_0^2 (-2)\, dt = -4$.



📖 Bibliografía citada (es una buena idea leer *al menos un par* de textos para esta asignatura).

Apostol, Tom. *Calculus volume I. One-Variable Calculus, with an introduction to linear algebra.* Segunda edición. Vol. II. II vols. New York: John Wiley & Sons, 1967.

—. *Calculus volume I. One-Variable Calculus, with an introduction to linearr algebra.* Segunda edición. Vol. II. II vols. New York: John Wiley & Sons, 1967.

—. *Calculus volumen 2. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades.* Segunda edición en castellano [Original: Calculus II, Multi-variable calculus and linear algebra. with applications to differential equations and probabilty]. Traducido por Francisco Vélez Cantarell. Vol. II. 2 vols. Barcelona: Reverté, 1980.

Birkhoff, Garret, y Gian-Carlo Rota. *Ordinary Differential Equations.* Cuarta edición. Singapore: John Wiley & Sons, 1989.

Boyer, Carl Benjamin, y Uta Merszbach. *A history of mathematics.* Segunda edición. Republic of Singapore: John Wiley & Sons, 1989.

Braun, Martin. *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.* Primera edición en español [Original 1983, Differential Equations and Their Applications]. Traducido por Ignacio Barradas Bribiesca. México D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica, 1990.

Browder, Andrew. *Mathematical Analysis. An introduction.* Primera edición. New York: Springer Verlag, 1996.

Cheng, David. *Fiel and Wave Electromagnetics.* Segunda edición. Massachussets: Addison-Wesley, 1998.

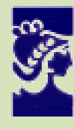
Elsgoltz, L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.* Segunda edición. Traducido por Carlos Vega. Moscú: Mir, 1977.

Gingras, Yves. «Matematismo y exclusión: socioanálisis de la formación de las ciudades científicas.» En *Bachelard y la epistemología francesa*, de Jean Jacques Wunenburger, traducido por María de los Ángeles Serrano, 87-114. Buenos Aires: Nueva Visión, 2006.

---

[i] La prueba de esta afirmación es sencilla, basta ver que $\|\bar{\gamma}(t)\| = \sqrt{2}$, que es, ciertamente, menor que 3.

[j] Puede verse (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1968, §89.3, 491-492, Santaló 1993, §23.2, 175-177, Marsden y Tromba 1991, §8.3, 518, 522); alternativamente, y menos directos modos pueden verse en (Apostol 1980, §10.17,418-419, ejemplos 2 y 3). En resumen, de lo que se trata es que, siendo el campo irrotacional en el abierto simplemente conexo, puede definirse allí una función potencial, de donde, por el teorema fundamental del cálculo integral en su versión n-dimensional, la integral curvilínea se obtiene como diferencia de los valores que toma la función potencial entre los puntos extremos de la curva sobre la que se circula, lo que la independiza de la curva en sí (siempre que esté contenida en ese dominio y sea regular e inyectiva).



Halliday, D., R. Resnick, y Jearl Walker. *Fundamentals of Physics. Fourth edition extended, with Modern Physics.* Cuarta edición. New York: John Wiley & Sons, 1993.

Hertig, Ricardo. *Mecánica teórica.* Cuarta edición. Buenos Aires: El ateneo, 1978.

Kreider, Donald, Robert Kuller, y Donald Ostberg. *Ecuaciones diferenciales.* Primera edición. Traducido por Federico Velasco Coba y Jorge Ludlow. New York: Fondo educativo interamericano, 1973.

Kurtis, Philip. *Cálculo de varias Variables con álgebra lineal.* Primera edición, primera reimpresión. Traducido por María Cristina Sangines de Salinas. México D.F.: Limusa, 1979.

Lang, Serge. *Cálculo II.* Primera edición. Traducido por Hugo Pereyra. México D. F.: Fondo educativo interamericano, 1976.

—. *Introducción al Análisis Matemático.* Primera edición. [Original 1968, Undergrauate Analysis]. Traducido por Manuel López Mateos y Mario. Muñoz Mella. Wimington, Delaware.: Addison Wesley Iberoamericana., 1990.

Leeuw, Karen de. *Calculus.* Cuarta edición en castellano de la primera edición en inglés. [Original 1966: Calculus]. Traducido por Mario Rapaport. Buenos Aires: Eudeba, 1984.

Marsden, Jerrold E., y Anthony, J. Tromba. *Cálculo Vectorial.* Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. Traducido por Manuel López Mateos y Sergio Adarve. Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.

Postnikov, M. *Lectures in geometry.* Primera edición en inglés de la edición original rusa de 1979. Traducido por Vladimir Shokurov. New York: Mir Publishers, 1982.

Reitz, J., F. Milford, y R. Christy. *Fundamentos de la teoría electrommagnética.* Segunda edición. Traducido por Carlos Martínez Ávila y Patricio Carranza. Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.

Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja, y César Trejo. *Anális Matemático III. Análisis funcional y aplicaciones.* Tercera edición. Vol. III. 3 vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1965.

—. *Análisis Matemático I. Análisis algebraico. Teoría de ecuaciones. Cálculo infinitesimal de una variable.* Octava edición. Vol. I. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1969.

—. *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones.* Séptima edición. Vol. II. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1968.

Roxin, Emilio, y Vera Spinadel. *Ecuaciones diferenciales ordinarias.* Segunda edición corregida y ampliada. Buenos Aires: Eudeba, 1976.

Santaló, Luis. *Vectores y tensores con sus aplicaciones.* Décimocuarta edición. Buenos Aires: Eudeba, 1993.

Vasíliev, N., y V. Gutenmájer. *Rectas y curvas.* Primera edición en castellano. Traducido por Margarita Gómez. Moscú: Mir, 1980.

Zill, Dennis. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Segunda Edición en Castellano [Original 1968: A First Course in differential equations with applications]. Traducido por Eduardo Ojeda Peña y ÁLvaro Cofré Mata. México: Thomson, 2007.

φα.